4.1 导数

2023年10月31日 星期二 10:01

定义：设函数 f 在点 x_0 的某个邻域内有定义. → 因为我要计算 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1) 存在，则称 f 在点 x_0 处可导

且称该极限为 f 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$

若极限 (1) 不存在，则称 f 在点 x_0 处不可导

令 $\Delta x = x - x_0$，则 $x\to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

设 f 在点 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$

从而 $f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x = o(\Delta x)$ $\Delta x\to 0$

即 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$ $\Delta x\to 0$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$ $\Delta x\to 0$.

从而当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$.

故 f 在点 x_0 处连续 ($f(x)-f(x_0)$ 与 $x-x_0$ 为同阶无穷小)

定理. 如果函数 f 在点 x_0 处可导，则 f 在点 x_0 处连续.

在 x_0 处可导只能说明在 x_0 处连续

将因变量记作 y，$y=f(x)$

令 $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ 此时 Δx - 自变量的改变量，Δy - 应变量的改变量.

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，称 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为差商

? 有没有函数在 x_0 点可导，但 f 在点 x_0 的某个邻域内不连续

令 $f(x)=x^2D(x)$，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数

则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2D(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}xD(x)=0$

$\forall x_0\neq 0$ 令 $\{x_n'\}$ 为趋于 x_0 的有理数，$f(x_n')=x_0^2$

令 $\{x_n''\}$ 为趋于 x_0 的无理数，$f(x_n'')=0$

从而由归结原则，f 在 x_0 处不连续

定义（**左、右导数**）设函数 f 在点 x_0 的某个右邻域 $[x_0, x_0+\delta_0)$ 内有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 f 在点 x_0 处是右可导的，并把该极限称为 f 在点 x_0 处的右导数，记作 $f'_+(x_0)$

类似的，我们可定义 f 在 x_0 处的左导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

※ 注意区分 $f'(x_0^+)$ 与 $f'_+(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'_+(x_0)$ (仅在 $f(x)$ 在 x_0 处右连续时成立)

性质：设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义，则 f 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等.

定义（**可导函数、导函数**）设函数 f 在区间 I 上有定义，若 $\forall x\in I$，有 f 在点 x 可导（在区间的端点处有单侧导数存在），则称 f 在区间 I 上可导，也称 f 是区间 I 上的可导函数.

若 f 在区间 I 上的可导，则 $\forall x\in I$，可将其对应于 f 在点 x 处的导数（在区间端点处，对应于单侧导数）.

由此定义的函数，称为 f 的导函数，即

$I\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

记作 f' $\dfrac{df}{dx}$ 或 y' $\dfrac{dy}{dx}$

※ (1) $\dfrac{dy}{dx}$ 可将其看作一个整体或看作求导算子 $\dfrac{d}{dx}$ 对 y 进行运算.

如：$\dfrac{d}{dx}(x^2)=2x$

(2) $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数也可记作：

$y'|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$ $f'|_{x=x}$

性质：设函数 f 在点 x_0 的某个右邻域 $[x_0, x_0+\delta_0)$ 内有定义，且 $f'_+(x_0)>0$

则：$\exists\delta>0$，$\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，均有 $f(x)>f(x_0)$

定义：设函数 f 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\exists\delta>0$，使 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，有 $f(x)\le f(x_0)$，则称 x_0 是 f 的一个极大值点，$f(x_0)$ 称为 f 的一个极大值.

极大值与极小值统称为极值，（极值点不一定可导）

一定要注意极值点的原始定义

从而若 $f'(x)>0$，x_0 一定不是极值点

$f'(x_0)<0$，x_0 一定不是极值点

费马 (Fermat) 定理：设 f 在点 x_0 可导，且 x_0 是 f 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

定义：若 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 f 的稳定点，或临界点

性质：若 f 在 x_0 处可导

x_0 是 f 的极值点 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ x_0 是 f 的临界点

达布 (Darboux) 定理，也称导函数介值定理

设 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$

则任取介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的一个实数 λ，

必存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\lambda$.

令 $F(x)=f(x)-\lambda x$

只要证：$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$

由条件 $F'_+(a)\cdot F'_-(b)=(f'_+(a)-\lambda)(f'_-(b)-\lambda)<0$

从而 $f'_+(a)-\lambda$ 与 $f'_-(b)-\lambda$ 异号

不妨设 $f'_+(a)-\lambda<0$ $f'_-(b)-\lambda>0$，即 $F'_+(a)<0$ $F'_-(b)>0$

从而 $\exists\, 0<\delta<b-a$，使 $\forall x\in(a,a+\delta)$ 有 $F(x)<F(a)$ (3)

$\forall x\in(b-\delta,b)$ 有 $F(x)<F(b)$ (4)

由 F 在 $[a,b]$ 上可导，从而在 (a,b) 上连续，于是 F 在 $[a,b]$ 上可取到最小值. 即 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $F(\xi)\le F(x)$

非端点处的最值点为极值点

$\forall x\in[a,b]$，由 (3)(4) 两式，$\xi\neq a,b$，从而 ξ 也是 F 的极小值点，又 F 在点 ξ 处可导，于是由费马定理 $F'(\xi)=0$

并且此时有 $\xi\in(a,b)$，从而结论成立.

※ 这注定了有些函数不会成为任意函数的导数

反函数求导定理

设函数 f 在 (a,b) 上连续且严格单增的，$x_0\in(a,b)$，若 f 在点 x_0 可导且 $f'(x_0)$，则 f 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 可导且 $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

另一种形式：

若 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$ 是函数 $x=\varphi(y)$，$y\in(\alpha,\beta)$ 的反函数，若 φ 在 (α,β) 上连续、严格单调，并且 $\exists y_0\in(\alpha,\beta)$，使 φ 在点 y_0 可导且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $y=f(x)$ 在点 $x_0=\varphi(y_0)$ 处可导，且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$

$x_0 \underset{f^{-1}(y)}{\overset{f(x)}{\rightleftarrows}} y_0$ $f'(x_0)=\dfrac{1}{f^{-1\prime}(y_0)}$

例：$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{(\tan y)'}=\cos^2 y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $(x=\tan y)$

复合函数求导法则

设函数 f 在点 $g(x_0)$ 处可导，函数 g 在点 x_0 处可导，则复合函数 $f\circ g$ 在点 x_0 处可导.

$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

记 $u_0=g(x_0)$ 令

$$H(u)=\begin{cases}\dfrac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & u\neq u_0\\ f'(u_0), & u=u_0\end{cases}$$

$(f\circ g)'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$

① 对 $\forall x\neq x_0$，有 (1) 式成立.

② $H(u)$ 在点 u_0 处连续

当 $x\to x_0$ 时 $u=g(x)\to g(x_0)=u_0$

从而由 H 在点 x_0 处连续，有 $H(u)\to H(u_0)$

从而 (左) $=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\overset{令u=g(x)}{=}\lim\limits_{u\to u_0}H(u)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=H(u_0)\cdot g'(x_0)$

对于 $y=u(x)^{v(x)}$ 的求导

$\ln y=v(x)\ln u(x)$

$y'=\left(v'(x)\ln(u(x))+\dfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\cdot v(x)\right)\cdot u(x)^{v(x)}$

隐函数求导

由 $F(x,y)=0$ + 一定条件，确定 $y=f(x)$

例：$x^2+y^2=1$ 且 $y\ge 0$ $\Rightarrow$ $y=\sqrt{1-x^2}$

$x+y\sin y=1$

$1+y'\sin y+y\cdot\cos y\cdot y'=0$ (2)

$y'=-\dfrac{1}{\sin y+y\cos y}$

高阶导数

定义：设函数 f 在点 x_0 的某个邻域内可导，如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 f 在点 x_0 处的二阶导数，记作 $f''(x_0)$

一阶、二阶、三阶导记为 $f'(x_0)$，$f''(x_0)$，$f'''(x_0)$

四阶以上记为 $f^{(n)}(x_0)$

定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上任一点都 n 阶可导，则称函数

$x\longmapsto f^{(n)}(x)$

为 f 的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}$，$y^{(n)}$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

可以把 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ 表示为 $\dfrac{d^n}{dx^n}y$，或 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n y$

函数在 n 阶可导 则函数的 $(n-1)$ 阶导函数在某邻域内均可导.

(1) $y=x^n$

$$y^{(k)}=\begin{cases}n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot x^{n-k}, & k\le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

(2) $y=\sin x$

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(3) $y=e^x$ $(e^x)^{(n)}=e^x$

定理：（高阶导数的四则运算法则）

设函数 u 和 v 都在点 x_0 处 n 阶可导，则

(1) $(u\pm v)^{(n)}(x_0)=u^{(n)}(x_0)\pm v^{(n)}(x_0)$

(2) $(uv)^{(n)}(x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(n-k)}(x_0)\cdot v^{(k)}(x_0)$ （高阶导数的莱布尼兹法则）

(3) 关于除法，省去

例 $y=x^2\sin x$ 求 $y^{(10)}$

令 $u(x)=x^2$，则 $u'=2x$，$u''=2$ $u^{(n)}=0$ $(n\ge 3)$

$v(x)=\sin x$ $v^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n\ge 0)$

$y^{(10)}=C_{10}^8\cdot 2\cdot\sin(x+4\pi)+C_{10}^9\cdot 2x\sin\left(x+\dfrac{9}{2}\pi\right)+C_{10}^{10}\cdot x^2\sin(x+5\pi)$.

例：研究 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 的高阶导数

1阶 ~~2阶~~ ~~3阶~~ ····

参变量函数的导数 ↳ 也称为参数函数

在数学分析中，平面曲线 C 一般的表述形式是如下的参数方程.

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta] \quad (1)$$

(psi)

其中 φ 与 ψ 都是 t 的连续函数

在 $t=t_0$ 处，记 P 为 $(\varphi(t_0),\psi(t_0))$

令 $Q(\varphi(t_0+\Delta t),\psi(t_0+\Delta t))$

记 $\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$

$\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$

则割线 PQ 的斜率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0))/\Delta t}{(\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0))/\Delta t}=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$

若 φ 与 ψ 在 t_0 处均可导，且 $\varphi'(t_0)\neq 0$

若记切线与 x 轴正方向的夹角为 α

此时 $\tan\alpha=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$

类似地，如果 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都在 t_0 处可导

且 $\psi'(t_0)\neq 0$

$\cot\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}$

定义（**光滑曲线**）设曲线 C 由参变量方程 (1) 给出，若函数 φ 与 ψ 的导函数 φ' 与 ψ' 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\forall t\in[\alpha,\beta]$ 有 $(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$，则 C 是一条光滑曲线

※ 注：如果 C 是光滑曲线，那么曲线在其上的任意一点都存在切线，且切线与 x 轴正方向的夹角 $\alpha(t)$ 关于 t 连续.

设在t_0的某邻域 $O(t_0,\delta)$ 内

$x=\varphi(t)$严格单调，且$\varphi'(t_0)\neq 0$

则存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，$x\in\varphi(O(t_0,\delta))$

从而此时

$y=\psi(t)=\psi\circ\varphi^{-1}(x)\quad x\in\varphi(O(t_0,\delta))$

令 $x_0=\varphi(t_0)$，则 $t_0=\varphi^{-1}(x_0)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\psi'(\varphi^{-1}(x_0))\cdot(\varphi^{-1})'(x_0)$$

$$=\psi'(t_0)\cdot\frac{1}{\varphi'(t_0)}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

也可记作 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

设上面的条件都成立，且$\varphi''(t_0)$与$\psi''(t_0)$都存在

则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=?$

此时 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\\ x=\varphi(t)\end{cases}$

☆☆☆ 所以 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{d}{dt}\cdot x}=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$

求 $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

常用方法：(2)两边关于x求导

$y''(\sin y+y\cos y)+y'(\cos y+\cos y\cdot y'-\sin y\cdot y\cdot y')=0$.

理解方式1：$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{d}{dt}x}\Leftrightarrow\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$.

关于t的函数

也就是复合函数的求导法则的变式.

理解方式2：(可以这样理解，但不严谨(φ不一定有反函数))

$\begin{cases}y=\psi(t)\\ x=\varphi(t)\end{cases}$

则有 $t_0=\varphi^{-1}(x_0)$ $\quad y=\psi(\varphi^{-1}(x))$

在x处导数为 $y'=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$

$y''=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$

例：试由摆线参数方程，

$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$，$0\le t\le 2\pi$

所确定的函数$y=y(x)$的一阶导数$\frac{dy}{dx}$与二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}$

易错！ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\cot\frac{t}{2})'}{1-\cos t}=\frac{-(\csc^2\frac{t}{2})\frac{1}{2}}{1-\cos t}=-\frac{1}{4}\csc^4\frac{t}{2}$

极坐标

设 Oxy 为如图的一个直角坐标系

下面建立另一个坐标系，保留原点O，称其为极点，

称射线$\vec{Ox}$为极轴

任取平面上的一点P

取 $\rho=|OP|$ 为点P的极径，令θ为射线$\vec{Ox}$逆时针

旋转到所需的角度，称θ为点P的极角

(ρ,θ)称为P的极坐标

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

设曲线C由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$给出，

求$\theta=\theta_0$处，曲线在$(\theta_0,\rho(\theta_0))$处的切线斜率.

$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$

于是在$\theta=\theta_0$处，切线斜率为

$$k=\left.\frac{(\rho(\theta)\sin\theta)'}{(\rho(\theta)\cos\theta)'}\right|_{\theta=\theta_0}=\left.\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$$

导数极限定理（并不是显然成立的）

【例子】$f'(x_0)$存在，但$\lim_{x\to x_0}f'(x)$不存在. 处处可导，但是导函数不连续

经常出现的例子

经典例子 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$f'(0)=0$，但$\lim_{x\to 0}f'(x)$不存在.

【例子】$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在，但$f'(x_0)$不存在.

$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 不存在, & x=0\end{cases}$，$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$存在.

这个是去心的

【结论】考研范围内，导函数若有间断点，只可能是震荡间断点

1.如果$\lim_{x\to x_0}f'(x)$与$f'(x_0)$均存在，便有$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(x_0)$.

2.如果$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在+增加条件$f(x)$在$x=x_0$连续这一条件，便有$f'(x_0)$存在，且$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(x_0)$.

只要f(x)在x0连续，→导函数连续

1.如果$\lim_{x\to x_0}f'(x)$与$f'(x_0)$均存在，便有$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(x_0)$.

【证明】$f'(x_0)$存在，则$f(x)$在$x=x_0$连续，则

$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f'(x)$.

使其满足$\frac{0}{0}$型

2.如果$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在，增加条件$f(x)$在$x=x_0$连续这一条件，便有$f'(x_0)$存在，且$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(x_0)$.

【证明】$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f'(x)$.

还可以从 Lagrange 中值定理的角度去看

(虽然本质上类似，因为洛必达在$\frac{0}{0}$型时就是用柯西中值定理推出来的)

【导数极限定理】若函数$f(x)$满足下列条件：

(1) $f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内连续；

(2) $f(x)$在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内可导；

(3) 极限$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在；

则$f(x)$在x_0处可导，且$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$.

【单侧导数极限定理（右）】若函数$f(x)$满足下列条件：

(1) $f(x)$在x_0的某右邻域$U_+(x_0)$内连续；

(2) $f(x)$在x_0的某右去心邻域$\mathring{U}_+(x_0)$内可导；

(3) 极限$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$存在；

则$f(x)$在x_0处可导，且$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$.

【单侧导数极限定理（左）】若函数$f(x)$满足下列条件：

(1) $f(x)$在x_0的某左邻域$U_-(x_0)$内连续；

(2) $f(x)$在x_0的某左去心邻域$\mathring{U}_-(x_0)$内可导；

(3) 极限$\lim_{x\to x_0^-}f'(x)$存在；

则$f(x)$在x_0处可导，且$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)$.

4.2 微分

2023年11月9日 星期四 13:35

定义：设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，且它在点 x_0 的某个邻域有定义，称 f 在点 x_0 处可微，如果：$\exists A\in\mathbb{R}$，满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)\qquad(5)$$

若函数 f 在区间 I 上的某一点都可微，则称 f 在 I 上可微.

设 f 在点 x_0 处可微，则 $\exists A\in\mathbb{R}$，使(5)成立.

从而 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\quad[\Delta x\to 0]\qquad(6)$

于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A\qquad(7)$

这说明 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$

反过来，设 f 在点 x_0 处可导，令 $A=f'(x_0)$，则(7)成立

$$\Rightarrow\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x}\to 0\quad(\Delta x\to 0)$$

从而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x=o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$

所以(5)式成立

这说明 f 在点 x_0 处可微

定理：如果 f 在 x_0 的某个邻域内有定义，则

f 在点 x_0 可微 $\Longleftrightarrow$ f 在点 x_0 可导

定义：设 f 在点 x_0 处可微，则称

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

为 f 在点 x_0 处的微分，记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x)\big|_{x=x_0}$

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的任一点都可微，则它在 I 上的某一点的微分记作

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x,\quad x\in I\qquad(*)$$

或 $df(x)=f'(x)\Delta x$

注意到对于函数 $y=x$，有 $(x)'=1$，从而

$$dx=\Delta x$$

称其为自变量的微分.

可以把 (*) 式改写为

$$dy=f'(x)\cdot dx$$

关于微分的四则运算法则

(1) $d(u(x)\pm v(x)) \overset{\text{定义}}{=} (u(x)+v(x))'dx$

$\overset{\text{导数的四则运算法则}}{=} (u'(x)+v'(x))dx$

$= du(x)+dv(x)$

(2) $d(u(x)v(x)) = v(x)\,du(x)+u(x)\,dv(x)$

(3) $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{1}{v^2(x)}\left(v(x)\,du(x)-u(x)\,dv(x)\right)$

(4) $d(f\circ g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\,dx$

令 $y=f(g(x))$ 此时有 $dy=f'(g(x))\,g'(x)\,dx$ (**)

再令 $u=g(x)$，则 $du=g'(x)\cdot dx$ 且 $y=f(u)$

从而 (**) 可改写为 $dy=f'(u)\,du$

※ $dy=f'(x)\cdot dx$，不仅当 x 是自变量时成立，既是 x 是中间变量也成立，这个性质称作一阶微分的形式不变性.

经典反例

2023年12月5日 星期二 19:26

① $x^2D(x)$

狄利克雷函数

性质：在 $x=0$ 处可导，但在0处的某个邻域内不连续